

В. Яковенко, канд. фіз.-мат. наук

Академія митної служби України

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗІГРІВАННЯ НАСИПНИХ ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩ ЕНЕРГІЄЮ МІКРОХВИЛЬОВОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

*Побудовано математичну модель процесу розігрівання в мікрохвильовому електромагнітному полі замерзлих при транспортуванні пористих матеріалів з урахуванням фазових перетворень. Розв'язок сформульованої задачі дозволяє визначити розподіл температур у твердій і рідкій фазах, закон руху границі фазового перетворення та робочу частоту електромагнітного поля.*

V. Yakovenko

## MATHEMATICAL MODEL OPERATION OF BULK POROUS MATERIALS' HEATING-UP BY ENERGY OF A MICROWAVE ELECTROMAGNETIC FIELD

*The mathematical model of a frozen porous materials' warming process in microwave electromagnetic field is constructed. The solution of the formulated problem allows to determine ranges of temperatures in solid and fluid phases, the law of a motion of a boundary's phase changes and working frequency of an electromagnetic field.*

**Вступ.** При транспортуванні насипних вантажів залізничним транспортом або при тривалому простої вагонів у місцях завантаження або вивантаження в зимових умовах відбувається замерзання пористого матеріалу, що транспортується. Основною причиною замерзання є підвищена вологість, унаслідок чого утворюється тверда фаза у вигляді льоду. Це приводить до ускладнення вивантаження, порушується робота транспорту і промислових підприємств. Тому для промисловості і залізниць проблема розморожування сипучих вантажів узимку є надзвичайно актуальною [1].

Розморожування пористих середовищ у вагонах здійснюється в гаражах-тепляках, де передача тепла до пористого середовища здійснюється конвекцією при обтіканні стінок газом, а так само радіацією від смолоскипа і розпечених стінок. У роботі [2] виконано комплексні теоретичні й експериментальні дослідження розморожування сипучих вантажів у гаражах-тепляках.

У даній роботі пропонується теоретично дослідити процес розігрівання замерзлих насипних вантажів енергією мікрохвильового електромагнітного поля. Фізичні передумови мікрохвильового відновлення сипкості замерзлих насипних вантажів полягає в тому, що електромагнітна енергія по-різному поглинається різними речовинами [3].

**Постановка задачі.** Розглянемо нестационарний процес теплообміну при розігріванні пористих матеріалів в умовах фазового перетворення «тверда фаза – рідина», що виникає під дією мікрохвильового нагрівання. Такий процес будемо визначати системою нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних, яка складається з рівнянь Максвелла і рівнянь теплопровідності наступного виду:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial \tau}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial \tau}, \quad \operatorname{div} \vec{D} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (1)$$

$$\vec{D} = \varepsilon(T) \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu(T) \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma(T) \vec{E}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial (c_i \rho_i T_i)}{\partial \tau} + \nabla_i \vec{v} T_i = \operatorname{div} (\lambda_i \nabla T_i) + q(T_i, \vec{E}), \quad (3)$$

де  $\vec{E}, \vec{H}$  - вектори напруженості електричного та магнітного полів відповідно,  $\vec{D}, \vec{B}$  - вектори електричної та магнітної індукції відповідно,  $\vec{j}$  - щільність струму провідності,  $\varepsilon_i = \varepsilon' - i\varepsilon'' = \varepsilon' - i\sigma/\omega$ ,  $\mu$  - абсолютні діелектрична і магнітна проникності матеріалу відповідно,  $\sigma$  - провідність матеріалу,  $\omega$  - кругова частота,  $c_i, \rho_i, \lambda_i$  - коефіцієнт теплоємності, щільність і коефіцієнт теплопровідності матеріалу, що залежать від температури  $i$ -ої фази,  $\vec{V}_i$  - вектор швидкості переміщення  $i$ -го матеріалу,  $\hat{V}$  - оператор Гамільтона,  $q = 0,5\omega\varepsilon'tg\delta|\vec{E}|^2$  - питома поглинена потужність,  $T_i$  - температура  $i$ -го матеріалу,  $tg\delta = \varepsilon''/\varepsilon'$  - тангенс кута діелектричних утрат матеріалу.

Наведена система рівнянь доповнюється початковими та граничними умовами, а також умовою на межі розділу „тверда фаза - рідина”.

Слід зазначити, що розв'язок наведеної системи рівнянь пов'язаний з труднощами не тільки обчислювального характеру, але й принциповими. Таке твердження ґрунтується на наступному: умови на межі розділу фаз є нелінійними, сформульована модель є багатомірною відносно просторових змінних, електрофізичні параметри матеріалів залежать від температури і є наближеними, алгоритми розв'язку таких задач вимагають обґрунтування та використання необхідних комп'ютерних технологій. Тому слід розглянути спрощену модель процесу, реалізацію якої можна провести методами комп'ютерного моделювання. Для такої моделі слід довести її несуперечливість з відомими та узгодженість для часткових випадків або порівняти отримані результати з експериментальними. Розігрівання пористих середовищ, що містять вологу, мікрохвильовою енергією супроводжується складними процесами тепломасопереносу. Це фазові перетворення рідини, зміна льодистості, вологоперенос, взаємодія парової вологи з кісткою середовища. Крайова задача про нагрівання області кінцевих розмірів з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, що дозволяє визначити розподіл температур у рідкій і твердій фазах у залежності від частоти електромагнітного поля, а також закон руху фазового перетворення, може бути сформульована в такий спосіб:

- у рідкій фазі:

$$\tau_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial \tau^2} + \frac{\partial T_1}{\partial \tau} = a_1^2 \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \frac{\alpha E^2}{c\rho_1}, \tau > 0, 0 < z < \xi(\tau), \quad (4)$$

$$T_1(0, z) = T_C,$$

$$\left. \frac{\partial T_1}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0, \quad (5)$$

$$T_1(\tau, 0) = T_C, \quad T_1(\tau, \xi) = T_\Phi; \quad (6)$$

- у твердій фазі:

$$\tau_1 \frac{\partial^2 T_2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial T_2}{\partial \tau} = a_2^2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2}, \tau > 0, \xi(\tau) < z < l, \quad (7)$$

$$T_2(0, z) = T_0,$$

$$\left. \frac{\partial T_2}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0, \quad (8)$$

$$T_2(\tau, l) = T_0,$$

$$T_2(\tau, \xi) = T_\Phi. \quad (9)$$

Умова Стефана на ізотермічній границі розподілу фаз має вигляд [4]:

$$q_2[\tau, \xi(\tau)] - q_1[\tau, \xi(\tau)] = L\rho(\tau_1) \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \frac{d\xi}{d\tau}, 0 < \xi(\tau) < l, \quad (10)$$

де  $q_i = \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial z}, i=1,2$ .

Зв'язок між температурним і електромагнітним полем при нестационарному процесі взаємодії електромагнітної хвилі з матеріалом можна визначити, використовуючи рівняння [5]:

$$\frac{d\bar{T}}{d\tau} = \Omega_2 f E^2, \quad (11)$$

де компоненти  $\bar{E}$  визначаються співвідношеннями [6].

Вектор теплового потоку можна представити у вигляді [4]:

$$\bar{q} = -\frac{\lambda}{\tau_1} \int_0^\tau \nabla T \exp\left[-\frac{(\tau - \eta)}{\tau_1}\right] d\eta, \quad (12)$$

де  $\tau_1$  – час температурної релаксації.

**Розв'язок задачі.** Рівняння (10) з урахуванням залежності (12) можна представити у вигляді:

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_{z=\xi(\tau)} - \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=\xi(\tau)} = L\rho(\tau_1) \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \frac{d\xi}{d\tau}, \quad (13)$$

де  $\xi(0) = \xi_0, (d\xi/d\tau)_{\tau=0} = 0$ .

Дотримуючись методу, викладеному в [6], уведемо нові функції:

$$\mathcal{G}_1(z, \tau) = T_1(z, \tau) - T_c - (T_\phi - T_c) \frac{z}{\xi(\tau)} \quad (14)$$

$$\mathcal{G}_2(z, \tau) = T_2(z, \tau) - T_\phi - (T_0 - T_\phi) \frac{z - \xi(\tau)}{l - \xi(\tau)}, \quad (15)$$

для яких граничні умови перетворюються на однорідні.

Щодо функцій розподілу температур у твердій фазі, що утворилася при розплавленні льоду і рухливій границі відповідно:  $\mathcal{G}_1(z, \tau), \mathcal{G}_2(z, \tau), \xi(\tau)$  - отримано наступні вирази:

$$T_1(z, \tau) = T_c + (T_\phi - T_c) \frac{z}{\xi(\tau)} + \frac{2}{\xi(\tau)} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\tau) \sin \frac{n\pi}{\xi} z, \tau > 0, 0 < z < \xi(\tau), \quad (16)$$

$$T_2(z, \tau) = T_\phi + (T_0 - T_\phi) \frac{z - \xi(\tau)}{l - \xi(\tau)} + \frac{2}{l - \xi(\tau)} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(\tau) \sin \frac{n\pi[z - \xi(\tau)]}{l - \xi(\tau)}, \tau > 0, \xi(\tau) < z < l, \quad (17)$$

де

$$\mathcal{G}_1(z, \tau) = \frac{2}{\xi(\tau)} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\tau) \sin \frac{n\pi}{\xi} z, \quad (18)$$

$$\mathcal{G}_2(z, \tau) = \frac{2}{l - \xi(\tau)} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(\tau) \sin \frac{n\pi[z - \xi(\tau)]}{l - \xi(\tau)}, \quad (19)$$

де  $\alpha_n(\tau)$  та  $\beta_n(\tau)$  - визначаються із системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\tau_1 \frac{d^2 \alpha_n}{d\tau^2} + \frac{d\alpha_n}{d\tau} + \left( \frac{n\pi \lambda_1}{\xi} \right)^2 \alpha_n = \frac{\xi}{2\xi} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{nm} \alpha_m + \frac{\tau_1 \xi}{\xi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{nm} \alpha_m + \frac{\tau_1 \xi}{\xi} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{nm} \frac{d\alpha_m}{d\tau} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\tau_1 \xi}{2} \left( \frac{2\xi}{\xi^2} - \frac{2\xi}{\xi^3} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{nm} \alpha_m + \frac{2\tau_1 \xi}{\xi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \Delta_{nm} \alpha_m + \frac{(-1)^{n+1} (T_\phi - T_c)}{n\pi} \left[ \xi + \frac{\tau_1 \left( \frac{2\xi}{\xi^2} - \frac{2\xi}{\xi^3} \right)}{\xi} \right] + \\
 & \int_0^\xi \frac{\alpha E^2}{c \rho_1} \sin \frac{n\pi}{\xi} z dz ; \\
 & \alpha_n(0) = \frac{(-1)^{n+1} (T_c - T_\phi)}{n\pi} \xi_0, \quad \left. \frac{d\alpha_n}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0 ; \\
 & \gamma_{nm} = 1, \Delta_{nm} = \frac{2m\pi^2 - 3}{12}, m = n ; \\
 & \gamma_{nm} = \frac{4(-1)^{n+m} mn}{m^2 - n^2}, \Delta_{mn} = \frac{4(-1)^{m+n} mn^3}{(m^2 - n^2)^2}, m \neq n . \\
 & \tau_1 \frac{d^2 \beta_n}{d\tau^2} + \frac{d\beta_n}{d\tau} + \left( \frac{n\pi a_2}{l - \xi} \right)^2 \beta_n = \frac{\xi}{2(l - \xi)} \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_{nm} \beta_m + \frac{\xi(l - \xi)}{(l - \xi)^2} \tau_2 \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{nm} \beta_m + \frac{\tau_1 \xi}{l - \xi} \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{nm} \frac{d\beta_m}{d\tau} + \\
 & + \frac{\tau_2 [2\xi + \xi(l - \xi)]}{(l - \xi)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_{nm} \beta_m + \frac{\tau_1 \xi}{(l - \xi)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{nm} \beta_m + \frac{T_0 - T_\phi}{n\pi} \left[ \xi + \frac{\tau_2 \left( \frac{2\xi}{\xi^2} - \frac{2\xi}{\xi^3} \right) + 2\xi}{l - \xi} \right] ; \\
 & \beta_n(0) = \frac{(T_0 - T_\phi)(l - \xi_0)}{n\pi}, \left. \frac{d\beta_n}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0 \\
 & \Omega_{nm} = -1, \delta_{nm} = \Omega_{nm}, \omega_{nm} = -\frac{1}{6} (8\pi^2 m^2 - 3), n = m \\
 & \Omega_{nm} = -\frac{4nm}{m^2 - n^2}, \delta_{nm} = 2\Omega_{nm}, \omega_{nm} = -\frac{8mn^3}{(m^2 - n^2)^2}, n \neq m . \tag{20}
 \end{aligned}$$

Тоді співвідношення на границі розподілу фаз з урахуванням залежностей для  $T_1(z, \tau)$  і  $T_2(z, \tau)$ , а так само рівняння (8) приймає вид [7]:

$$\begin{aligned}
 u \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \frac{d\xi}{d\tau} + \frac{1}{L\rho} \left[ \frac{\lambda_2 (T_\phi - T_0)}{l - \xi} + \frac{\lambda_1 (T_\phi - T_c)}{\xi} \right] + \frac{2\lambda_1 \pi}{\xi^2} \sum_{n=1}^{\infty} n (-1)^n \alpha_n - \frac{2\lambda_2 \pi}{(l - \xi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \beta_n = 0 \\
 \xi(0) = \xi_0, \quad \xi'(0) = 0. \tag{21}
 \end{aligned}$$

Якщо закон руху границі розподілу фаз задається на основі тих або інших фізичних розумінь, то системи диференціальних рівнянь будуть лінійними. Укажемо, що при  $\tau_1 \rightarrow 0$  отримані результати прагнуть до відповідних результатів задачі Стефана, що ґрунтується на теорії Фур'є.

Слід зазначити, що в дійсності мікрохвильова енергія в матеріалі загасає. Це приводить до виникнення розподілених джерел тепла, щільність яких є експериментально заданою функцією  $S$  координат і часу [5]. Для цього випадку мікрохвильового нагрівання рівняння (4) набуде вигляду:

$$\tau_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial \tau^2} + \frac{\partial T_1}{\partial \tau} = a_1^2 \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \frac{S}{c \rho_1}, \tag{22}$$

а умова зв'язку температурного і мікрохвильового електромагнітного поля -

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \Omega_2 f E^2, \quad (23)$$

яке дає можливість визначити шукану робочу частоту, що відповідає заданій функції  $S$ :

$$-\frac{(T_\phi - T_C)}{\xi^2} - \frac{2}{\xi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\tau) \sin \frac{n\pi}{\xi} z + \frac{2}{\xi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d\alpha_n}{d\tau} \sin \frac{n\pi}{\xi} z - \frac{2\pi}{\xi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n n z \cos \frac{n\pi}{\xi} z = \Omega_2 E^2 f.$$

Чисельна реалізація отриманих систем рівнянь відносно коефіцієнтів функціональних рядів спільно з рівнянням на рухомій межі областей твердої і рідкої фаз матеріалу не викликає принципових труднощів, наприклад, у системі MatLab. На рис.1 наведено графіки, які відповідають розподілу температури при розігріванні змерзлої пористої сировини в порівнянні з експериментальними результатами роботи [2]. Розподіл температури вантажу залізничного вагона відповідає моделюванню процесу розмерзання пористого середовища (пісок річковий):  $\rho=1650 \text{ кг/м}^3$ ,  $\lambda=0,35 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ ,  $c=0,8 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{К)}$  за умови початкової температури мінус  $10^\circ\text{C}$ , яка розподілялась по об'єму вагона. На рис. 1 експериментальна крива відповідає розподілу температури за часом у середині вагона. За умовами розрахунку у цій частині вагона, з використанням мікрохвильової енергії джерелом потужності 25 КВт та частотою 0, 915 ГГц наведена розрахункова крива розподілу температури у матеріалі. Ця крива має менший нахил, що відповідає більш рівномірному за часом мікрохвильовому прогріванню.

Слід зазначити, що керування процесом розмерзання пористого матеріалу за допомогою теплоносія (атмосферне повітря) в порівнянні з мікрохвильовим нагріванням доводить енергетичну економічність останнього [8].

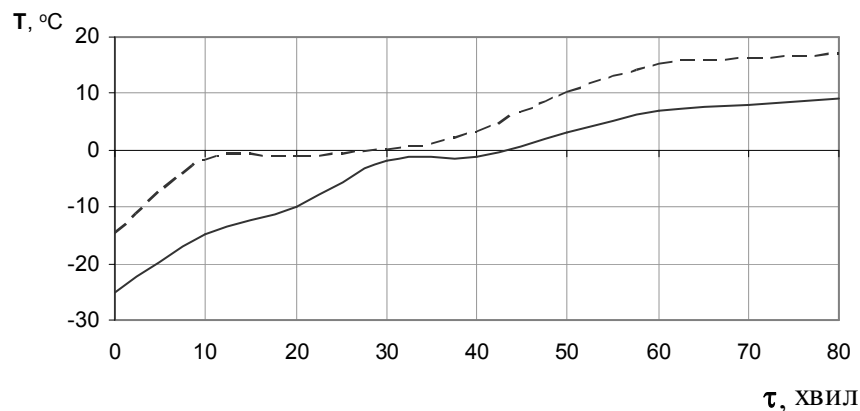


Рисунок 1 - Залежність температури пористого матеріалу від часу  
(——— - розрахунок з використанням мікрохвильової енергії, ----- експеримент [2])

**Висновок.** У роботі запропоновано математичну модель розігрівання пористих середовищ, наприклад, замерзлих насипних вантажів, енергією мікрохвильового електромагнітного поля з урахуванням фазових перетворень. Отримано співвідношення для розподілу температур у твердій і рідкій фазах, закон руху межі фазового перетворення, а також співвідношення для визначення робочої частоти електромагнітного поля. Проведено чисельну реалізацію моделі та порівняння результатів з раніше отриманими.

1. Кожевников Н.Н., Попов В.И. Прогнозирование процессов промерзания в сыпучих материалах при железнодорожных перевозках. – Новосибирск: Наука, 1978. — 104 с.
2. Приходько А.А., Голуб В.Г., Бойко В.Н., Вильтовский А.В. Математическое моделирование и экспериментальное исследование размораживания пористых сред // Теплообмен - ММФ-96. Теплообмен в капиллярно-пористых телах. – Минск: АНК „ИТМО им. А.В. Лыкова" АНБ, 1996. – Т. VII. – С. 50 – 54.
3. Линник Ю.М. Основы разупрочнения мерзлых пород СВЧ - полями. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1982. – 212 с.
4. Лыков А.В. Теплообмен. Справочник. – М.: Энергия, 1971. – 560 с.
5. Пюшнер Г. Нагрев энергией сверхвысоких частот. Пер. с англ. – М.: Энергия, 1968. – 175 с.
6. Яковенко В.О. Моделювання теплообміну при збудженні в матеріалі надвисокочастотного поля. Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла // Збірник наукових праць Дніпропетровського національного університету. – Дніпропетровськ, 2006. – Вип. 7. – С. 163 – 168.
7. Яковенко В.О. Моделювання надвисокочастотного нагрівання матеріалу в умовах перевидбиття плоскої електромагнітної хвилі // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук: КДПУ, 2007. – Вип. 5/2007 (46), частина 1. – С. 55-57.
8. Яковенко В.О. Моделювання та оптимізація сушіння матеріалів у надвисокочастотних камерах // Вісник Академії митної служби України, №4 (36), 2007. - С.91 – 97.

*Одержано 04.03.2008 р.*